1　指数対数・三角関数

1.1　[1] 指数対数

a, b は $ab = \frac{1}{4}, a < b$ を満たす正の数とする．x の関数
$h(x) = (\log_2 \frac{x}{a})(\log_2 \frac{b}{x})\ (x > 0)$
の最大値が $\frac{9}{4}$ となるような a, b を求めていく．$ab = \frac{1}{4}$ の両辺に対し，2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a + \log_2 b = \boxed{\textbf{アイ}} \tag{1}$$

であるから，$x > 0$ のとき，$X = \log_2 x$ とおくと $h(x) = \boxed{\textbf{ウ}} X^2 - \boxed{\textbf{エ}} X - (\log_2 a)(\log_2 b)$ となる．

したがって，$h(x)$ の最大値が $\frac{9}{4}$ のとき

$$(\log_2 a)(\log_2 b) = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}} \tag{2}$$

である．$0 < a < b$ と (1),(2) より，$a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}, b = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ と求められる．

1.2 [2] **三角関数**

座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円の円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる．ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．また，点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を H とする．さらに，第 4 象限に点 A を，三角形 OAH が正三角形となるようにとる．

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき，PH$=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，四角形 OAHP の周の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} + \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である．

(2) $\angle AOP = \theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ である．三角形 OAP の面積を S とする．$S = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \cos\theta sin(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}})$ であり,

加法定理を用いると，$S = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\cos^2\theta)$ と変形でき,

$S = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\sin(2\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}) + \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$

と変形できるため,θ の範囲に注意すると，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{チツ}}}$ において S は最大になる．

(3) $p > 0$ で，x の関数 $f(x) = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\sin(px + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}) + \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ とする．そこで，$f(x)$ の周期が正で 2 番目に小さいものが 3π となるのは $p = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

2　微分積分

$a \neq 0$ の実数とする．関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^3 - 3(a^2+1)x^2 + 12ax$ とする．$f(x)$ の導関数は，

$$f^{'}(x) = \boxed{\text{ア}}\{ax^2 - \boxed{\text{イ}}(a^2+1)x + \boxed{\text{ウ}}a\}$$

であるから，関数が極値を持たないような a の値は，$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オカ}}$ である．ここで，$a = \boxed{\text{エ}}$ のときの曲線を $C : y = f(x)$ とする．

原点における曲線 C の接戦 l の傾きは $\boxed{\text{キク}}$ である．接線 l と平行な直線のうち，原点以外の点 P で C と接する直線 m を考える．C と m の接点 P の座標は $P(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コサ}})$ であり，直線 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{キク}}x - \boxed{\text{シス}}$$

である．さらに，C と m の共有点のうち P でない方を Q とすると，点 Q の座標は $(\boxed{\text{セソ}}, \boxed{\text{タチツ}})$ である．

次に，3 点 O,P,Q を通る放物線 D を考える．

$$y = \boxed{\text{テト}}x^2 + \boxed{\text{ナニ}}x$$

である．ここで，D と m で囲まれた領域を E とする．さらに，t は，$\boxed{\text{セソ}} < t < \boxed{\text{ケ}}$ を満たす実数とし，領域 E において

$x \leq t$ を満たす部分の面積 S

$x \geq t$ を満たす部分の面積を T

とする．このとき $S + T = \boxed{\text{ヌネノ}}$ であり，$S = T$ を満たす t の値は $\boxed{\text{ハ}}$ である．

3　数列

等差数列 $\{a_n\}$ は，$a_3 = 5, a_6 = 11$ の時の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ア}}n - \boxed{\text{イ}} \tag{3}$$

であり

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}n(n + \boxed{\text{オ}})(\boxed{\text{カ}}n - \boxed{\text{キ}})$$
$$(n = 1, 2, 3, ...)$$

また，数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 2^n + n - 1$$
$$(n = 1, 2, 3, ..)$$

を満たしている．このとき $b_1 = \boxed{\text{ク}}$ である．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{ケ}}^{n-1} + \boxed{\text{コ}}$$

数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_n & (n = 2k-1) \\ b_n & (n = 2k) \end{cases} \tag{4}$$

で定める．また

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$
$$(n = 1, 2, 3, ...)$$

とする．

$$a_{2n-1} = \boxed{サ}n - \boxed{シ}(n = 1, 2, 3, ..)$$
$$b_{2n} = \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\boxed{ソ}^n + \boxed{タ}(n = 1, 2, 3, ...)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{m} = \boxed{チ}m^{\boxed{ツ}} - m(m = 1, 2, 3, ...)$$
$$\sum_{k=1}^{m} = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}(\boxed{ナ}^m - 1) + m(m = 1, 2, 3, ...)$$

である．したがって，末項が $n = 2k$ のときの数列 c_n を考えると

$$S_n = \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}(\boxed{ネ}^n - 1) + \frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}n^2 \tag{5}$$

である．また，$S_n < 1000$ を満たす最大の自然数 n は $\boxed{ヒフ}$ である．

4　ベクトル

O を原点とする座標空間における 4 点を A(2,3,-1),B(3,5,2),C(-2,3,3),D(1,5,4) とする．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$$

である．したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$, で，ベクトル AB とベクトル CD の内積は,$\boxed{\text{ケコ}}$ であり，ふたつのベクトルのなす角を θ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \tag{6}$$

である．直線 AB 上に点 E，直線 CD 上に点 F をとると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を実数 s, t を用いて，それぞれ

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　と表される．ここで，直線 AB と直線 CD の交点を P とすると，点 P の座標は $(\boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}})$ であり，三角形 BDP の面積は $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の両方に垂直で，Z 成分が正である大きさ $\sqrt{6}$ のベクトルを $\vec{n}$ とすると，$\vec{n} = (\boxed{\text{ツ}}, \boxed{\text{テト}}, \boxed{\text{ナ}})$ である．次に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} + \vec{n}$ となる点 Q を考える．また，線分 BD の中点を M とすると $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}, \overrightarrow{\mathrm{PC}})$ である．よって，点 M を通り $\vec{n}$ に平行な直線と直線 PQ の交点を R とすると，四面体 BDPR の体積は $\boxed{\text{ネ}}$ である．

5　終わりに

この問題はマーク式総合問題集 数学 II・B 2013 (河合塾シリーズ) を参考にさせて頂きました．心より感謝いたします．ありがとうございます．